学校编码：10384 分类号 ______ 密级 ______
学号：200423069 UDC ____________

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

强定向图平均距离的界

Bounding the Average Distance of the Strong Orientations

郝 国 亮

指导教师姓名： 钱 建 国 教 授

专 业 名 称： 应 用 数 学

论文提交日期： 2007 年 5 月

论文答辩日期： 2007 年 6 月

学位授予日期： 2007 年 6 月

答辩委员会主席： ____________

评 阅 人： ____________

2007 **年** 5 **月**

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　　）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

目 录

Contents

摘　要

一个 (无向或有向) 图 G 的平均距离是 G 中所有顶点间的平均距离，记为 $\mu(G)$. 如果 G 是一个 2 边连通图，则 $\vec{\mu}_{min}(G)$ 表示 G 的所有强定向图 D 中最小的平均距离 $\mu(D)$. 本文研究强定向图的最小平均距离问题，得到了 2 边连通图，含有割点的 2 边连通图，联图以及完全多部图关于 $\vec{\mu}_{min}(G)$ 的上下界，它们与图的顶点数，边数，围长和最优直径等有着密切的关系. 特别地，我们证明了：

1. 设 $|V(G)|=a$, $|V(H)|=b$, $a\le b$, $a+b=N$, 且将 b 表示为 $b=k\binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil}+r$, $k\in\{0,1,2,\cdots\}, r\in\{0,1,2,\cdots,\binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil}-1\}$. 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G\vee H)\le 2+\frac{4kr+2k(k-1)\binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil}}{N(N-1)}-\frac{|E(G)|+|E(H)|}{N(N-1)}.$$

2. 设 $N=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 如果 $a_1\le\prod\limits_{i=2}^{n}\binom{a_i}{\lceil\frac{a_i}{2}\rceil}$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{a_1,a_2,\cdots,a_n})=2-\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}a_ia_j}{N(N-1)}.$$

关键词： 强定向图，平均距离，界.

Abstract

The average distance of a graph (or directed graph) G, denoted by $\mu(G)$, is the average among the distances between all pairs (ordered pairs) of vertices of G. If G is a 2-edge connected graph, then $\vec{\mu}_{min}(G)$ is the minimum average distance $\mu(D)$ taken over all strong orientations D of G. In this paper, some lower and upper bounds to $\vec{\mu}_{min}(G)$ for 2-edge connected graphs, 2-edge connected graphs with cut vertices, joint graphs and Multipartite graphs are estabished in terms of the order, size, girth and optimal diameter of G. In particular, we show that

1. Let $|V(G)| = a$, $|V(H)| = b$, $a \leq b$, $a + b = N$ and let b be written as the form $b = k\binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ and $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil} - 1\}$. Then

$$\vec{\mu}_{\min}(G \vee H) \leq 2 + \frac{4kr + 2k(k-1)\binom{a}{\lceil\frac{a}{2}\rceil}}{N(N-1)} - \frac{|E(G)| + |E(H)|}{N(N-1)}.$$

2. Let $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. If $a_1 \leq \prod\limits_{i=2}^{n} \binom{a_i}{\lceil\frac{a_i}{2}\rceil}$, then

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{a_1, a_2, \cdots, a_n}) = 2 - \frac{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j}{N(N-1)}.$$

Key words: strong orientation, average distance, bound.

第一章　引言

§1.1　图的定向问题

尽管很多问题本身能够自然地归结为图论形式，但是图的概念有时还是不十分适用的．例如在处理交通流问题时，必须知道网络中什么道路是单行道，什么方向上通行是允许的．显然在这种情形下网络的图的概念是不够用的．因此，需要给一个无向图定向使得它满足一定的性质．图的定向问题可追溯到 1939 年 Robbins 的一篇研究单行道交通系统的论文 [1], 在该文中， Robbins 证明了“任意一个 2 边连通图都有一个强定向图”． 1960 年， Nash-Williams[2] 通过证明每个 $2k$ 边连通图 G 都有 k 弧连通的定向图而推广了 Robbins 定理． Roberts[3], Boesch 和 Tindell[4] 与 Chung et al.[5] 都发现了找到 2 边连通图的强定向图的有效算法．并且 Chung et al.[5] 提供了一个线性 - 时间算法来测验一个图是否有强定向图，并且它若有强定向图的话，可以由此把它找出来．一些包含定向图平均距离的详细例子可以在 [6],[7],[8] 中找到．其它例子也可以在 [9],[10],[11],[12] 中找到．

1966 年， Ng 和 Teh [13] 证明了：

- 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m 的 2 边连通图，则 $\vec{\mu}_{\min}(G) \geq 2-\frac{m}{n(n-1)}$, 当且仅当 G 有最优直径为 2 的强定向图时取到等号．

2004 年， Peter Dankelmann[6] 等人证明了：

- 若 G 的每条边都位于 3 圈中，则 $\vec{\mu}_{\min}(G) \leq \frac{7}{4}\mu(G)$;
- 若 G 为极大平面图，则 $\vec{\mu}_{\min}(G) \leq \frac{5}{3}\mu(G)$;
- 若 G 为欧拉极大平面图或每条边都位于 3 圈的外可平面图，则 $\vec{\mu}_{\min}(G) \leq \frac{3}{2}\mu(G)$;
- 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数且 $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 $\vec{\mu}_{\min}(K_{a_1,a_2,\cdots,a_n}) \geq 2-\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j}{N(N-1)}$, 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 能分成余对 (n 为偶数) 或能分成余三元组 (n 为奇数) 时取到等号;
- 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m, 围长为 g 的 2 边连通图，则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \geq \frac{(g-2)m}{n(n-1)} + \mu(G).$$

2006 年，钱和徐 [14] 确定了完全二部图的最小平均距离：

- 对于任意两个正整数 p 和 q, 设 $p \le q$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{p,\,q}) = 2 + \frac{4kr + 2k(k-1)\binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil}}{(p+q)(p+q-1)},$$

其中 $q = k\binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 以及 $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil} - 1\}$.

本文的主要结果:

- 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \ge 2 - \frac{m}{n(n-1)} + \frac{d(d-1)(d-2)}{6n(n-1)},$$

当 G 有最优直径为 2 的强定向图时取到等号;

- 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m, 围长为 g 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d \ge g$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \ge \frac{g}{2} + \frac{(d-g)^3 + 6(d-g)^2 + 11(d-g) + 6}{6n(n-1)};$$

- 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \le d - \frac{(d-1)m}{n(n-1)} - \frac{d(d-1)(d-2)}{3n(n-1)},$$

当 G 有最优直径为 2 的强定向图时取到等号;

- 若 G 是顶点数为 n 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \le \frac{nd}{n-1} - \frac{d(d+1)}{2(n-1)},$$

当 G 为圈时取到等号;

- 若 G 是含有割点，顶点数为 n, 边数为 m, 围长为 g 的 2 边连通图，则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \ge 2 + \frac{(g-4)m}{n(n-1)} + \frac{4(g-2)(n-3)}{n(n-1)};$$

- 设 $|V(G)| = a$, $|V(H)| = b$, $a \le b$, $a + b = N$, 且将 b 表示为 $b = k\binom{a}{\lceil \frac{a}{2} \rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}, r \in \{0, 1, 2, \cdots, \binom{a}{\lceil \frac{a}{2} \rceil} - 1\}$. 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G \vee H) \le 2 + \frac{4kr + 2k(k-1)\binom{a}{\lceil \frac{a}{2} \rceil}}{N(N-1)} - \frac{|E(G)| + |E(H)|}{N(N-1)};$$

- 对于任意正整数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n (n \geq 4, n \neq 5)$, 并且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = N$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{a_1,a_2,\cdots,a_n}) \begin{cases} = 2 - \frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j}{N(N-1)}, & \text{若 } a_1 \leq \prod\limits_{i=2}^{n} \binom{a_i}{\lceil \frac{a_i}{2} \rceil}, \\ \leq 2 - \frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j}{N(N-1)} + \frac{k(k-1)\binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil}+2kr}{N(N-1)}, & \text{若 } a_1 > \prod\limits_{i=2}^{n} \binom{a_i}{\lceil \frac{a_i}{2} \rceil} \text{ 且} \\ & \lceil \frac{M}{2} \rceil \geq a_2, \\ \leq 2 - \frac{\sum\limits_{2\leq i<j\leq n} a_i a_j}{N(N-1)} + \frac{k(k-1)\binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil}+2kr}{N(N-1)}, & \text{其它.} \end{cases}$$

  其中 $M = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $a_1 = k\binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 以及 $r \in \{0, 1, 2, \cdots \binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil} - 1\}$;

- 对于任意正整数 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, 并且 $a_1 + a_2 + a_3 = N$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{a_1,a_2,a_3}) \leq \begin{cases} 2, & \text{若 } a_1 \leq \binom{a_2}{\lceil \frac{a_2}{2} \rceil}\binom{a_3}{\lceil \frac{a_3}{2} \rceil}, \\ 2 + \frac{2k(k-1)\binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil}+4kr}{N(N-1)}, & \text{其它.} \end{cases}$$

  其中 $M = a_2 + a_3$, $a_1 = k\binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 以及 $r \in \{0, 1, 2, \cdots \binom{M}{\lceil \frac{M}{2} \rceil} - 1\}$.

§1.2 符号及术语

定义 1.1 一个无向图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$, 其中 $V(G)$ 是非空的顶点集， $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 ψ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对 (不必相异). 若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\psi_G(e) = uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v; 顶点 u 和 v 称为 e 的端点. 端点重合为一点的边称为环，端点不相同的边称为连杆。图 G 的顶点数和边数分别用符号 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 表示.

定义 1.2 一个图 G 称为简单图，如果它既没有环也没有两条连杆连接同一对顶点。

定义 1.3 图 G 的途径是指一个有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$, 它的各项交替地为顶点和边，使得对 $1 \leq i \leq k$, 边 e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称 W 是从 v_0

到 v_k 的一条途径，或一条 (v_0, v_k) 途径顶点． v_0 和 v_k 分别称为 W 的起点和终点，而 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 称为它的内部顶点．整数 k 称为 W 的长．若途径 W 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 互不相同，则 W 称为迹；这时 W 的长恰好是 $\varepsilon(W)$. 又若途径 W 的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 也互不相同，则 W 称为路．称一条途径是闭的，如果它有正的长且起点和终点相同．若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同，则它称为圈，记为 $g(G)$(或简记为 g). 无向图 G 的围长是指 G 中最短圈的长.

定义 1.4 称图 H 是 G 的子图，如果 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 并且 ψ_H 是 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制．假设 V' 是 V 的一个非空子集．以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由 V' 导出的子图，记为 $G[V']$; $G[V']$ 称为 G 的导出子图．假设 E' 是 E 的一个非空子集．以 E' 为边集，以 E' 中边的端点全体为顶点集所组成的子图，称为 G 的由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$; $G[E']$ 称为 G 的边导出子图.

定义 1.5 设 G_1 和 G_2 是 G 的子图．若 G_1 和 G_2 没有公共点，则称它们是不相交的． G_1 和 G_2 的并图 $G_1 \cup G_2$ 是指 G 的一个子图，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 其边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$.

定义 1.6 G 的两个顶点 u 和 v 称为连通的，如果在 G 中存在 (u, v) 路．连通是顶点集 V 上的一个等价关系．于是就存在 V 的一个分类，把 V 分成非空子集 $V_1, V_2, \cdots, V_\omega$, 使得两个顶点 u 和 v 是连通的当且仅当它们属于同一子集 V_i. 子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_\omega]$ 称为 G 的分支．若 G 只有一个分支，则称 G 是连通的.

定义 1.7 图 G 的顶点 v 称为割点，如果 E 可以分为两个非空子集 E_1 和 E_2, 使得 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 恰好有公共顶点 v. 没有割点的连通图称为块.

定义 1.8 对 V 的子集 S 和 S', 用 $[S, S']$ 表示一个端点在 S 中，另一个端点在 S' 中的所有边的集．所谓 G 的边割是指形为 $[S, \overline{S}]$ 的 E 的子集，其中 S 是 V 的非空真子集，且 $\overline{S} = V \backslash S$. G 的边连通度定义为： G 的所有 k 边割中最小的 k.

定义 1.9 不相交的图 G 和 H 的联图 $G \vee H$ 是指在 $G + H$ 中，把 G 的每个顶点和 H 的每个顶点连接起来所得到的图.

定义 1.10 一般说来，两个图 G 和 H 称为同构的 (记为 $G \cong H$), 如果存在两个一一映射 θ: $V(G) \to V(H)$ 和 ϕ: $E(G) \to E(H)$, 使得 $\psi_G(e) = uv$ 当且仅当 $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; 这样一个映射对 (θ, ϕ) 称为 G 和 H 之间的一个同构.

定义 1.11 所谓偶图 (或二部图) 是指一个图，它的顶点集可以分解为两个 (非空) 子集 X 和 Y, 使得每条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；这样一种分类 (X,Y) 称为图的一个二分类. 完全偶图是具有二分类 (X,Y) 的简单偶图，其中 X 的每个顶点都与 Y 中的每个顶点相连；若 $|X| = m$ 而 $|Y| = n$, 则这样的图记为 $K_{m,n}$. 完全 k 部图是指一个简单图，它的每个顶点与不在同一子集中的所有顶点均相连接.

定义 1.12 一个有向图 D 是指一个有序三元组 $(V(D), A(D), \psi_D)$, 其中，$V(D)$ 是非空的顶点集， $A(D)$ 是不与 $V(D)$ 相交的弧集，而 ψ_D 是关联函数，它使 D 的每条弧对应于 D 的有序顶点对 (不必相异). 若 a 是一条弧，而 u 和 v 是使得 $\psi_D(a) = (u, v)$ 的顶点，则称 a 为从 u 连接到 v; 称 u 是 a 的尾， v 是 a 的头.

定义 1.13 和无向图类似， D 的有向途径是指一个有限非空序列： $W = (v_0, a_1, v_1, \cdots, a_k, v_k)$, 它的各项交替地是顶点和弧，使得对于 $i = 1, 2, \cdots, k$, 弧 a_i 有头 v_i 和尾 v_{i-1}. 如有向途径 W 的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 和弧 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 互不相同, 则 W 称为有向路. 若 D 中存在有向 (u,v) 路，则顶点 v 称为在 D 中从顶点 u 出发可到达. 称两个顶点在 D 中是双向连通的，如果它们互相可到达. 对于有向图 D 中的任意两个顶点，如果它们在 D 中是双向连通的，则称 D 为强有向图.

定义 1.14 给定任意无向图 G, 对于它的每个连杆，给其端点指定一个顺序，从而确定一条弧，由此得到 G 的一个有向图 D. 这样的有向图 D 称为 G 的一个定向图. 称 D 为 G 的强定向图，若图 G 的定向图 D 为强有向图.

定义 1.15 若在图 (有向图) $G = (V, E)$ 中，顶点 u 和 v 是连通的，则 u 和 v 之间的距离 $d_G(u, v)$ $(d(u, v))$ 是指 G 中最短 (u, v) 路 (有向路) 的长.

定义 1.16 设 $G = (V, E)$ 是顶点数为 n, 边 (弧) 数为 m 的图 (有向图), 则 G

的直径定义为：

$$d(G) = \max\{d_G(u,v)|\ (u,v) \in V(G) \times V(G)\},$$

其中， $d_G(u,v)$ 是 G 中 u 到 v 的距离 (有向距离).

定义 1.17 用 $\mathcal{D}(G)$ 来表示 G 的所有强定向图的集合. 则 G 的最优直径定义为 [7]

$$\vec{d}(G) = \min\{d(D)|\ D \in \mathcal{D}(G)\}.$$

定义 1.18 G 中所有顶点间 (无向或有向) 距离的平均值，称为 G 的平均距离，记为 $\mu(G)$. 若 G 为无向图，则

$$\mu(G) = \sum_{u,\ v \in V} d(u,v)/\binom{n}{2};$$

若 G 为有向图，则

$$\mu(G) = \sum_{(u,\ v) \in V \times V} d(u,v)/n(n-1).$$

用 $\sigma(G)$ 来表示 G 的总距离，如果 G 为无向图，则 $\sigma(G) = \sum\limits_{u,v \in V} d(u,v)$; 如果 G 为有向图，则 $\sigma(G) = \sum\limits_{(u,v) \in V \times V} d(u,v)$. 我们注意到，对于 $u, v \in V(G)$, 若 $d(u,v) = \infty$, 则 $\sigma(G)$=∞.

定义 1.19 对于一个有向图 D 中的顶点 v, 有必要考虑以它为尾和头的最大有向距离，即 v 的出离心率和入离心率，它们分别记为 $e_D^+(v)$ 和 $e_D^-(v)$. 换句话说， D 中 v 的出离心率定义为：

$$e_D^+(v) = max\{d_D(v,\ x)|\ x \in V(D)\};$$

类似地，入离心率定义为：

$$e_D^-(v) = max\{d_D(x,\ v)|\ x \in V(D)\}.$$

并且设

$$\sigma_D^+(v) = \sum_{x \in V(D)} d(v,x);$$

以及

$$\sigma_D^-(v) = \sum_{x \in V(D)} d(x, v).$$

显然， $\sigma(D) = \sum \sigma_D^+(v) = \sum \sigma_D^-(v)$, 其中 v 取遍 D 的所有顶点.

定义 1.20 给定一个连通图 G, 定义

$$\vec{\mu}_{\min}(G) = \min\{\mu(D)|\ D \in \mathcal{D}(G)\}.$$

如果 $\mu(D) = \vec{\mu}_{\min}(G)$, 则称 D 为 G 的最优定向图.

§1.3 引理

下面我们介绍一些对本文非常重要的已知结果.

引理 1.1 [15] 如果 G 是顶点数为 n, 边数为 m, 围长为 g 的 2 边连通图，则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \geq 2 + \frac{(g-4)m}{n(n-1)}.$$

引理 1.2 [14] 对于任意两个正整数 p 和 q, 设 $p \leq q$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(K_{p,\ q}) = 2 + \frac{4kr + 2k(k-1)\binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil}}{(p+q)(p+q-1)},$$

其中 $q = k\binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + r$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 以及 $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \binom{p}{\lceil \frac{p}{2} \rceil} - 1\}$.

第二章　主要结果

§2.1　2 边连通图

本节通过顶点数，边数，围长以及最优直径来确定 2 边连通图 G 的最小平均距离 $\vec{\mu}_{\min}(G)$ 的上下界.

定理 2.1 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G)=d$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \geq 2-\frac{m}{n(n-1)}+\frac{d(d-1)(d-2)}{6n(n-1)},$$

当 G 有最优直径为 2 的强定向图时取到等号.

证明：设 D 为 G 的强定向图，以及 $d(D)=k$, 并设 p_i 表示有向距离为 i $(i=1,2,\cdots,k)$ 的有序顶点对的对数, 则 $p_1+p_2+\cdots+p_k=n(n-1)$. 由于 $d(D)=k$, 因而 D 中至少存在一条长为 k 的有向路. 不失一般性，设 v_0,v_k 是 D 中长为 k 的有向路的尾和头，并令 $P=v_0v_1\cdots v_k$ 是连接 v_0 和 v_k 长为 k 的一条有向路. 因而，我们可以得到 $d_D(v_0,v_k)=k, d_D(v_0,v_{k-1})=d_D(v_1,v_k)=k-1,\cdots,d_D(v_0,v_3)=d_D(v_1,v_4)=\cdots=d_D(v_{k-3},v_k)=3$. 因此， $p_k\geq 1$, $p_{k-1}\geq 2$, $\cdots$, $p_3\geq k-2$.

为了使 $\sigma(D)=1\cdot p_1+2\cdot p_2+\cdots+k\cdot p_k$ 最小，须要 $p_3,p_4,\cdots,p_k$ 最小，即 $p_3=k-2$, $p_4=k-3$, $\cdots$, $p_k=1$. 此时

$$\begin{aligned}
p_2 &= n(n-1)-p_1-(p_3+p_4+\cdots+p_k)\\
&= n(n-1)-m-[(k-2)+(k-3)+\cdots+1]\\
&= n(n-1)-m-\frac{(k-1)(k-2)}{2}.
\end{aligned}$$

由于 $k\geq \vec{d}(G)=d$, 因而

$$\begin{aligned}
&\sigma(D)\\
=\ &1\cdot p_1+2\cdot p_2+\cdots+k\cdot p_k\\
\geq\ &m+2[n(n-1)-m-\frac{(k-1)(k-2)}{2}]+3\cdot(k-2)+4\cdot(k-3)+\cdots+k\cdot 1\\
=\ &2n(n-1)-m+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\\
\geq\ &2n(n-1)-m+\frac{d(d-1)(d-2)}{6}.
\end{aligned}$$

于是，我们可以得到

$$\mu(D) \geq 2 - \frac{m}{n(n-1)} + \frac{d(d-1)(d-2)}{6n(n-1)}. \qquad \square$$

定理 2.2 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m, 围长为 g 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d \geq g$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \geq \frac{g}{2} + \frac{(d-g)^3 + 6(d-g)^2 + 11(d-g) + 6}{6n(n-1)}.$$

证明: 设 D 为 G 的强定向图，以及 $d(D) = k$. 显然，D 中存在一条长为 k 的有向路. 不失一般性，设 v_0,v_k 是 D 中长为 k 的有向路的尾和头，并令 $P = v_0v_1\cdots v_k$ 是连接 v_0 和 v_k 长为 k 的一条有向路. 剩下的顶点记为 $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_{n-1}$. 设 $p_i = |\{(v_s, v_t)|\ d_D(v_s, v_t) = i$ 且 $0 \leq s < t \leq k\}|$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, k$. 因此， $d_D(v_0, v_k) = k$, $d_D(v_0, v_{k-1}) = d_D(v_1, v_k) = k-1$, $\cdots$, $d_D(v_0, v_1) = d_D(v_1, v_2) = \cdots = d_D(v_{k-1}, v_k) = 1$, 于是，我们可以得到 $p_i = k - i + 1 (1 \leq i \leq k)$.

显然，对于 G 中的任意顶点 v_s 和 $v_t (0 \leq s < t \leq n-1)$, 有

$$d_D(v_s, v_t) + d_D(v_t, v_s) \geq \begin{cases} i+1, & \text{若 } 0 \leq s < t = s+i \leq k \text{ 且 } i \geq g, \\ g, & \text{其它}. \end{cases}$$

由于 $k \geq d$, 因而

$$\begin{aligned}
& \sigma(D) \\
= & \sum_{u,\ v \in V(G)} [d_D(u,v) + d_D(v,u)] \\
\geq & (g+1)\cdot p_g + (g+2)\cdot p_{g+1} + \cdot + (k+1)\cdot p_k + [\frac{n(n-1)}{2} - (p_g + p_{g+1} + \cdot + p_k)]\cdot g \\
= & (g+1)\cdot(k-g+1) + (g+2)\cdot(k-g) + \cdots + (k+1)\cdot 1 + \frac{n(n-1) - k(k+1)}{2} g \\
= & \frac{n(n-1)g}{2} + \frac{(k-g)^3 + 6(k-g)^2 + 11(k-g) + 6}{6} \\
\geq & \frac{n(n-1)g}{2} + \frac{(d-g)^3 + 6(d-g)^2 + 11(d-g) + 6}{6}.
\end{aligned}$$

于是，我们可以得到

$$\mu(D) \geq \frac{g}{2} + \frac{(d-g)^3 + 6(d-g)^2 + 11(d-g) + 6}{6n(n-1)}. \qquad \square$$

定理 2.3 若 G 是顶点数为 n, 边数为 m 的 2 边连通图，并且 $\vec{d}(G) = d$, 则

$$\vec{\mu}_{\min}(G) \leq d - \frac{(d-1)m}{n(n-1)} - \frac{d(d-1)(d-2)}{3n(n-1)},$$